

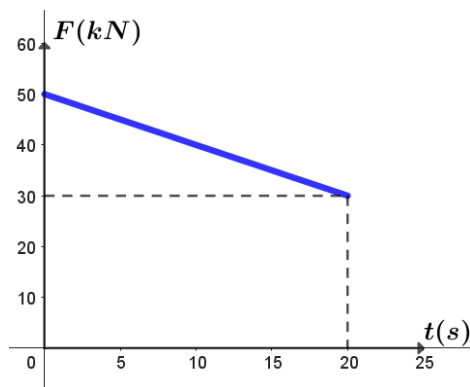
10º Concurso de Ciencias Básicas de la ANFEI  
Ronda final de FÍSICA

Reactivo 1

Tiempo: 12 minutos.

Un cohete de  $1400\text{ kg}$  se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra. Durante el encendido de  $20\text{ s}$ , la fuerza propulsora  $F$  del motor varía con el tiempo, como se muestra en la gráfica. Suponga que la aceleración gravitacional y la masa del cohete son constantes, determina:

- a) La rapidez máxima del cohete.
- b) La elevación del cohete al final del encendido.
- c) La máxima altura alcanzada.



### Resolución

- a) Rapidez máxima:  $\Sigma F_y = 0$ ; se da en  $t = 20 \text{ s}$

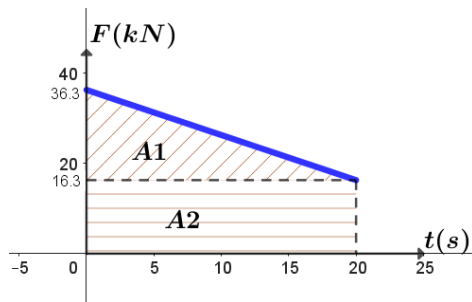
$$F(t) = -1000t + 50000$$

$$m = 1400 \text{ kg}$$

$$w = mg = (1400 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 13720 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = F(t) - mg = (-1000t + 50000) - 13720 = -1000t + 36280$$

La gráfica de  $\Sigma F_y$



Gráfica 2. Suma de fuerzas en función de tiempo

$$\Delta P = \int \Sigma F dt$$

$$A_1 = \frac{(20 \text{ kN})(20 \text{ s})}{2} = 200 \text{ kN} \cdot \text{s}$$

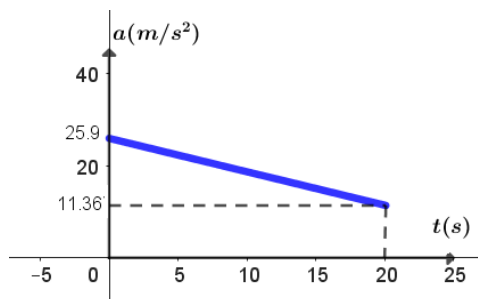
$$A_2 = (16.3 \text{ kN})(20 \text{ s}) = 325.6 \text{ kN} \cdot \text{s}$$

$$A_T = 525.6 \text{ kN} \cdot \text{s}$$

$$\Delta P = m(v_f - v_i) \Rightarrow v_f = \frac{\Delta P}{m} = \frac{525.6 \text{ kN} \cdot \text{s}}{1400 \text{ kg}} = 375.3 \text{ m/s}$$

- b) Para la altura en  $t = 20 \text{ s}$ , buscamos  $y = y(t)$  considerando la aceleración variable.

Como  $\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow$  gráficamente tenemos:



Gráfica 3. Aceleración en función del tiempo

Dando la expresión de  $a_y = a_y(t)$  de  $0 \leq t < 20s$

$$a_y = -0.7135t + 25.9 ; \text{ con } t \text{ en } s \text{ y } a \text{ en } m/s^2$$

Para  $v_y$ :  $a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \int a_y dt$

$$\Rightarrow v_y = -0.35675t^2 + 25.9t + v_0$$

con  $v_0 = 0$ .

De igual forma para

$$y = y(t) : y(t) = \int_0^t v_y dt$$
$$\Rightarrow y = -0.119t^3 + 12.95t^2$$

Evalutando en  $t = 20 s$

$$y = 4228 m$$

- c) Para  $H_{max}$ , a partir de  $t = 20 s$  se mueve verticalmente sólo con efecto de la gravedad con una  $v_{oy} = 375.43 m/s$  y  $v_y = 0$

$$d_y = \frac{v_y^2 - v_{oy}^2}{2g} \Rightarrow d_y = 7191 m$$

Por tanto

$$H_{m\acute{a}x} = 11419 m$$

Reactivo 2

Tiempo: 15 minutos.

Se pateea una pelota de 1 kg de masa, con una rapidez inicial de 30 m/s desde el suelo en un ángulo de  $40^\circ$  respecto a la horizontal. La fuerza de arrastre aerodinámico que actúa sobre la pelota, en condiciones estables, es  $\vec{F}_D = -0.5 \vec{v}$  N donde las componentes de la velocidad están en m/s.

- a) Determina el tiempo de vuelo de la pelota en el aire.
- b) Grafica la trayectoria de la pelota ( $\vec{r}$  como función del tiempo).

**RESOLUCIÓN**

Dado que

$$\overrightarrow{F_D} = -0.5 \vec{v}$$

Entonces el vector de aceleración queda:

$$\vec{a} = (-0.5v_x)\hat{i} + (-9.8 - 0.5v_y)\hat{j}$$

Considerando la segunda ley de Newton, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$m \frac{dv_x}{dt} + 0.5v_x = 0, \text{ para "x"}$$

$$m \frac{dv_y}{dt} + 0.5v_y + 9.8 = 0, \text{ para "y"}$$

Ya que se busca en que instante  $y = 0$ , se replantea el sistema de ecuaciones anterior para "x" y "y":

$$m \frac{d^2v_x}{dt^2} + 0.5 \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$m \frac{d^2v_y}{dt^2} + 0.5 \frac{dv_y}{dt} = -9.8$$

El caso de "x" es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, homogénea, cuya solución es:

$$x = c_1 + c_2 e^{-0.5t}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, en  $t = 0$ ,  $x = 0$  y  $V_x = 23 \text{ m/s}$ , se tiene:

$$x = 46(1 - e^{-0.5t})$$

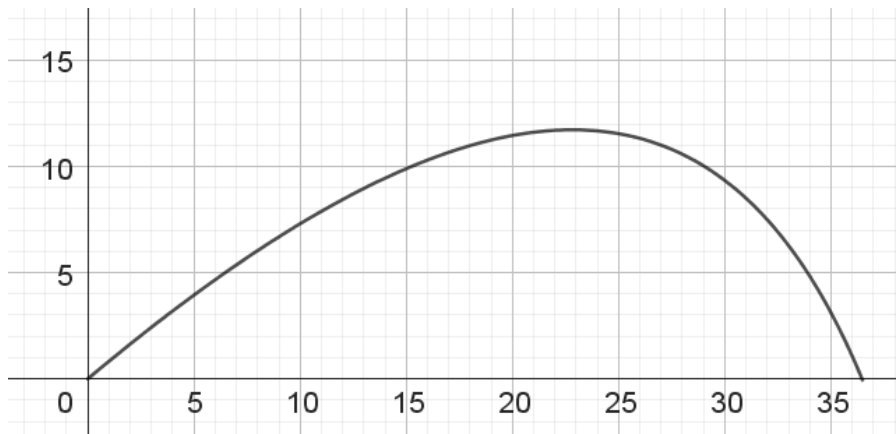
Para "y" se tiene una ecuación casi idéntica que "x" pero en este caso es una ecuación diferencial no homogénea, considerando las condiciones iniciales la solución para "y" es:

$$y = 77.8(1 - e^{-0.5t}) - 19.6t$$

Para el tiempo de vuelo, consideramos  $y = 0$  en la ecuación anterior, resolvemos de forma numérica y llegamos a:

$$t = 3.1469 \text{ s}$$

Con base en lo anterior, la gráfica de la posición es:

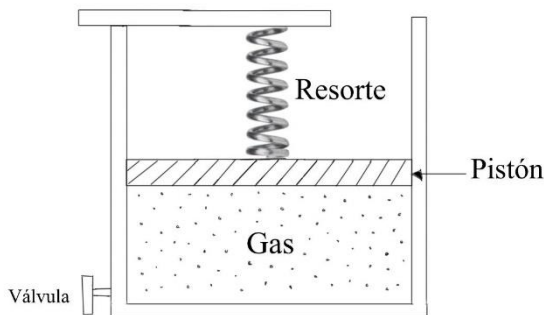


Gráfica 4. Posición de la pelota en función del tiempo.

Reactivo 3

Tiempo: 12 minutos.

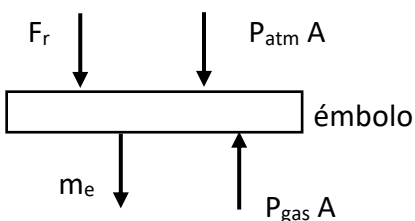
Un gas está confinado en un dispositivo vertical de cilindro – émbolo, como se muestra en la figura; este último tiene una masa de 4 kg y un área de sección transversal de  $30 \text{ cm}^2$ . Un resorte comprimido, sobre el émbolo, ejerce una fuerza variable. La constante del resorte es  $k = 12 \text{ N/cm}$ , la presión atmosférica del lugar es  $77 \text{ kPa}$  y no existe fricción entre el pistón y las paredes del cilindro. Se necesita hacer un análisis del efecto de la fuerza del resorte y la presión del gas para un diseño de una válvula de seguridad que se incorporará al dispositivo.



- Elabora un gráfico de la presión absoluta del gas en función de la fuerza de compresión que ejerce el resorte sobre el émbolo. Considere el intervalo de la fuerza de 0 a 800 N.
- Determina el modelo matemático asociado a la gráfica anterior, justificando el porqué del modelo utilizado.
- Una válvula de seguridad se activará cuando la presión del gas alcance los  $300 \text{ kPa}$ . Con base en ello, indica en qué intervalo estará la fuerza del resorte de manera que el equipo opere sin causar un accidente.
- Determina el trabajo de compresión que se tendría desde que el resorte no tiene elongación alguna hasta que se abre la válvula de seguridad.

## RESOLUCIÓN

a) Para encontrar la presión del fluido (P) en función de la fuerza en el resorte ( $F_r$ ) se traza un diagrama de cuerpo libre del émbolo:



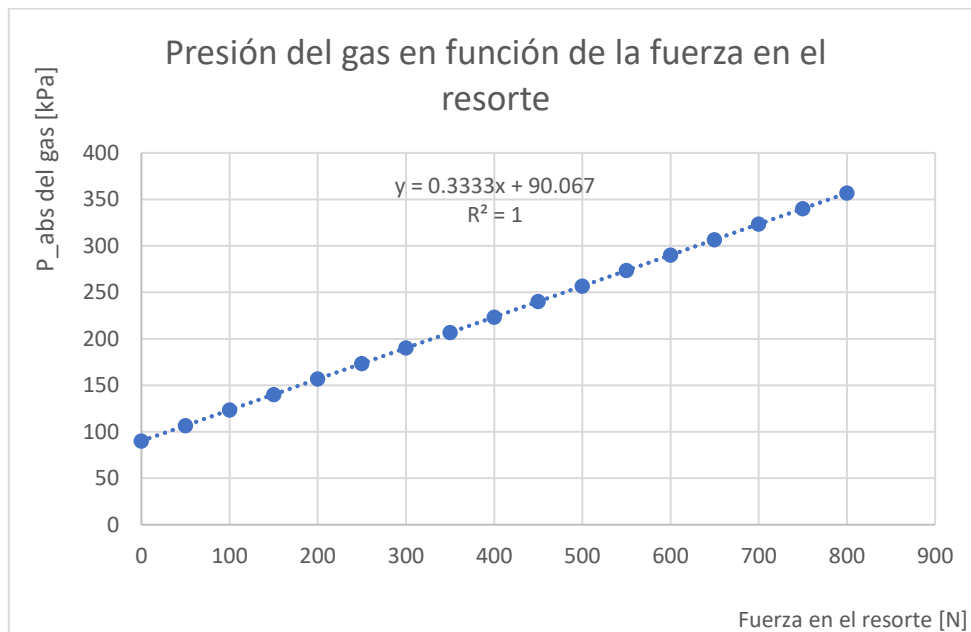
Como  $\Sigma F = 0$ , entonces:

$$P_{gas} = P_{atm} + \frac{F_r + m g}{A}$$

de donde

$$P_{gas} = 77 \text{ kPa} + \frac{F_r + (4 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{0.003 \text{ m}^2}$$

Con base en el modelo anterior, se puede obtener la gráfica que se muestra





b) En la gráfica anterior se observa que la relación es lineal por lo que se le puede asociar el siguiente modelo matemático:

$$P_{abs} = 0.333 \left[ \frac{kPa}{N} \right] F_r [N] + 90.067 [kPa];$$

o bien

$$P_{abs} = a \left[ \frac{kPa}{N} \right] F_r [N] + b [kPa];$$

$$\text{donde } a = 0.333 \left[ \frac{kPa}{N} \right] \text{ y } b = 90.067 [kPa]$$

c) Del modelo anterior se despeja  $F_r$ , por lo que

$$(F_r)_{\text{máx}} = \frac{P_{abs\_máx} - b}{a} = \frac{(300 \text{ kPa}) - (90.067 \text{ kPa})}{0.333 \text{ kPa/N}} = 629.862 [N]$$

Entonces

$$0 \leq F_r \leq 629.862 [N]$$

Para el cálculo del trabajo de expansión del gas tenemos que:

$${}_1W_2 = \int_1^2 P dV$$

Sustituyendo a P en función de  $F_r$ , tenemos

$${}_1W_2 = \int_1^2 (a F_r + b) dV$$

Como  $dV = A dx$  siendo A el área transversal del émbolo, entonces

$${}_1W_2 = \int_1^2 (a F_r + b) A dx$$

y como  $F_r = k x$ , entonces:

$${}_1W_2 = \int_1^2 (a k x + b) A dx$$

$${}_1W_2 = a A k \int_1^2 x dx + b A \int_1^2 dx = a A k \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 + b A [x]_1^2$$

La elongación mínima del resorte es  $x_1 = 0$  y la compresión máxima del resorte (desplazamiento máximo del émbolo) es

$$x_2 = \frac{(F_r)_{\max}}{k} ; \text{ entonces } x_2 = \frac{629.862 \text{ N}}{1200 \text{ N/m}}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} {}_1W_2 &= \frac{1}{2} \left( 0.333 \frac{\text{kPa}}{\text{N}} \right) (0.003 \text{ m}^2) \left( 1200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (0.5249 \text{ m})^2 \\ &\quad + (90.067 \text{ kPa}) (0.003 \text{ m}^2) (0.5249 \text{ m}) \\ {}_1W_2 &= 0.307 \text{ kJ} \end{aligned}$$

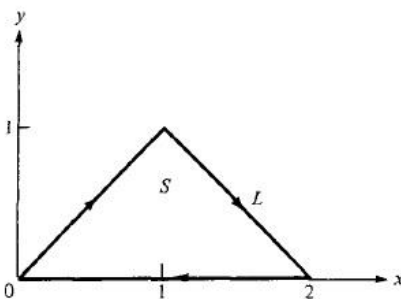
Reactivo 4

Tiempo: 11 minutos.

Se pretende construir una trayectoria triangular como la que se muestra en la figura, la cual será atravesada por una intensidad de campo magnético dada por

$$\vec{H} = x^2 y \hat{a}_x - y \hat{a}_y$$

Se desea determinar si el conductor que se utilizará en dicha trayectoria sea capaz de soportar 1 A de corriente.



**RESOLUCIÓN**

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

calculamos el rotacional del campo magnético para utilizar el lado derecho de la ecuación anterior

$$\text{rot} \vec{H} = -x^2 \hat{a}_z$$

Como la circulación de la corriente va en dirección contraria a las manecillas del reloj, siguiendo la *regla de la mano derecha*, el elemento diferencial de superficie está dado por

$$d\vec{S} = -dx dy \hat{a}_z$$

La integral queda

$$I_{enc} = \iint_S (-x^2)(-dx dy)$$

Por otro lado, el lado izquierdo de la superficie está acotado por la recta  $y = x$ , y el lado derecho por la recta  $y = -x + 2$ .

Luego,

$$\begin{aligned} I_{enc} &= \int_0^1 \int_y^{2-y} x^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \left. \frac{x^3}{3} \right|_y^{2-y} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 [(2-y)^3 - y^3] dy \\ &= \frac{7}{6} A \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede seleccionar el conductor ya que es capaz de manejar una corriente de más de 1 A.